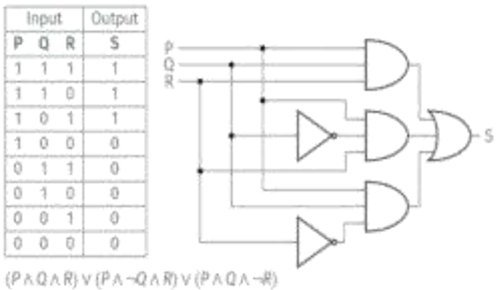
University of BOUIRA
Faculty of sciences
Department of Informatics

Module **Logique Mathematique** 2ème Année Licence

Cours 2

Logique des propositions



P	Q	R	S
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

$(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R)$

les bases (1)

BY : BENAISSI Sellami s.benaissi@gmail.com

OCT 2022

PLAN

Part 1

Rappelle

Definition

On peut définir la logique comme :

« la science qui étudie les règles générales du raisonnement correcte »

Le but de l'étude de la logique est donc :

- ❖ Raisonner correctement
- ❖ Résoudre les problèmes complexes
- ❖ Trouver les solutions rapidement

La logique classique

La logique comprend classiquement :

1. la logique des propositions
2. la logique des prédicats.

Calcul propositionnel

La proposition (assertion)

C'est une phrase informative qu'on peut juger vraie ou fausse, La proposition peut être affirmative ou négative

Variable propositionnelle

Une proposition (atome, proposition élémentaire) est représentée par **une variable**

Exemples :

- La terre est sphérique ≡ **P**
- Le soleil tourne autour de la terre ≡ **Q**

On dit que la **valeur de vérité** de la première phrase = Vrai

RAPPELLE

Calcul propositionnel

Les Connecteurs logiques

Connecteur	Opération	Exemple
$\neg$	Négation (non)	$\neg P$
$\wedge$	Conjonction (et)	$P \wedge Q$
$\vee$	Disjonction (ou)	$P \vee Q$
$\rightarrow$	Implication (implique)	$P \rightarrow Q$
$\leftrightarrow$	Equivalence (équivalent à)	$P \leftrightarrow Q$

La Table de vérité

P	Q	¬P	P∧Q	P∨Q	P→Q	P↔Q
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Part 2

Propriétés des connecteurs

Propriétés des connecteurs

❶ Commutativité de ∧ et ∨:

$$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$$
$$P \vee Q \equiv Q \vee P$$

❷ Associativité de ∧ et ∨:

$$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$$
$$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$$

❸ Distributivité de ∧ et ∨:

$$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$
$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

Autres propriétés :

4 Lois de Morgan

$$\neg(P \land Q) \equiv \neg P \lor \neg Q$$
$$\neg(P \lor Q) \equiv \neg P \land \neg Q$$

5 Idempotence

$$\neg\neg P \equiv P$$
$$P \land P \equiv P$$
$$P \lor P \equiv P$$

6 Propriétés de $\rightarrow$

$$P \rightarrow Q \; \neg(P \land \neg Q) \equiv \neg P \lor Q$$
$$P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$$
$$P \lor Q \equiv \neg P \rightarrow Q$$
$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \land (Q \rightarrow P)$$

Part 3

Formules propositionnelles

Formules propositionnelles

- Les propositions **atomiques** sont des formules
  - P et Q sont des formules

- Les propositions **complexes** sont des formules
  - Si P et Q sont des formules alors $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$, $(P \rightarrow Q)$, $(P \leftrightarrow Q)$, $\neg P$ sont des formules

Formules propositionnelles

Utilisation des parenthèses

Les parenthèses **( )** sont un moyen de lever l'ambiguïté.

- $\mathbf{P \rightarrow Q \leftrightarrow \neg R} \equiv (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg R)$
- $\mathbf{P \rightarrow Q \rightarrow R} \equiv (P \rightarrow Q) \rightarrow R$

Formules propositionnelles

Exemples de Formules

Formule	Non-Formule
P	$P+Q$
$(\neg P)$	$P\neg Q$
$P\rightarrow Q$	$\wedge Q$
$(P \wedge (Q))$	$(\wedge)$
$(\neg(P \wedge Q) \vee R)$	$(Q$
$(P \rightarrow (Q \vee R))$	$(P \rightarrow (Q \vee R)$

Sous Formule propositionnelle

Les **sous formules** d'une formule f sont définies par :

- f est une sous formule de f
- Si $\neg f'$ est une sous formule de f alors f' est une sous formule de f
- Si k $\in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ et $f1$ **k** $f2$ est une sous formule de f alors $f1$ et $f2$ sont des sous formules de f

Une sous formule de f est dite **stricte** si elle est différente de f elle même

Formules propositionnelles

Sous Formule propositionnelle

Exemple :

L'ensemble des sous formules de $(((P \vee Q) \wedge \neg P) \rightarrow R)$ est :

$$\{ (((P \vee Q) \wedge \neg P) \rightarrow R) , ((P \vee Q) \wedge \neg P) , (P \vee Q) , \neg P , P , Q , R \}$$

L ensemble des sous formules de $\neg \neg \neg P$ est :

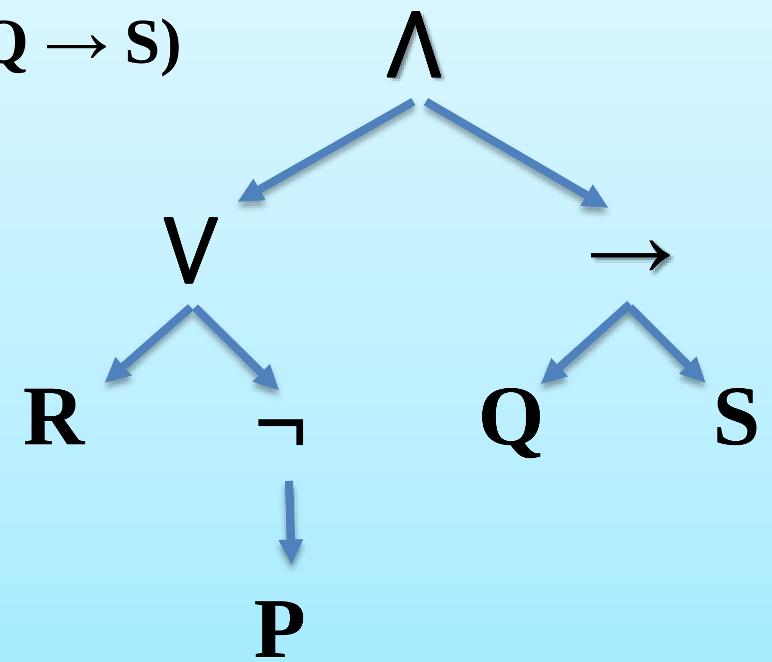
$$\{\neg \neg \neg P , \neg \neg P , \neg P , P\}$$

Arbre de décomposition

Arbre syntaxique d’une formule propositionnelle

On peut représenter une formule sous forme d’un **arbre**. Cela permet de bien lire la formule.

Exemple : $R \lor \neg P \land (Q \rightarrow S)$



Arbre de décomposition

Arbre syntaxique d'une formule propositionnelle

Pour chaque formule propositionnelle f il est possible de retrouver les sous formules qui ont servi à la construire :

Procédure de décomposition :

- Découper au niveau du **connecteur principal** de f.
- Enlever les **parenthèses** les plus externes de chacun des arguments du connecteur principal.
- Répéter l'opération de décomposition pour chacun des arguments jusqu' à arriver aux **variables.**

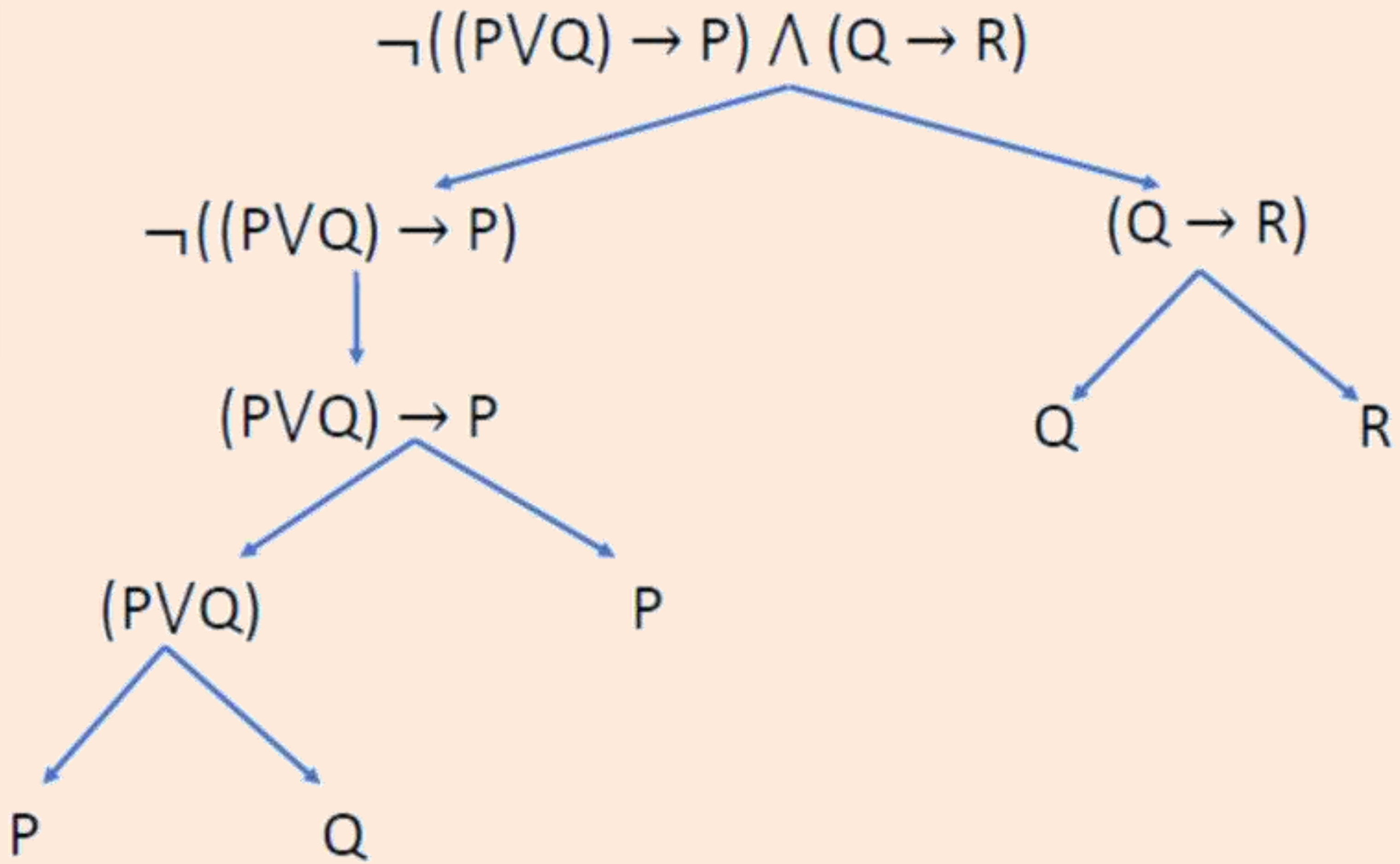
Les **nœuds de l'arbre** de décomposition d'une formule f sont les sous formules de f

Arbre de décomposition

Construire l'arbre de décomposition de la formule suivante :

$$\neg ((P \vee Q) \rightarrow P) \wedge (Q \rightarrow R)$$

Exemple 1 :

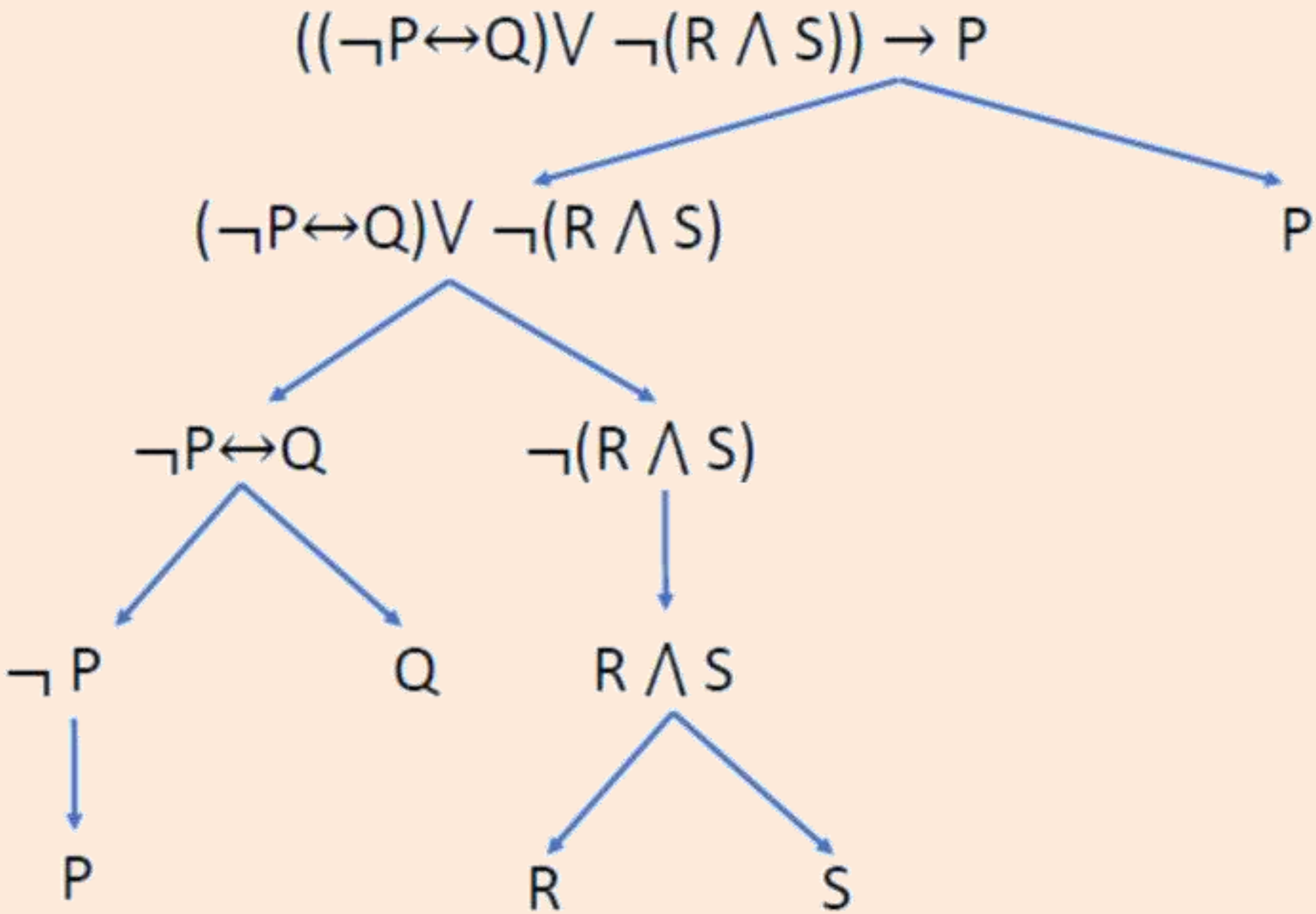


Arbre de décomposition

Exemple 2 :

Construire l'arbre de décomposition de la formule suivante :

$((\neg P \leftrightarrow Q) \vee \neg(R \wedge S)) \rightarrow P$



Notation préfixée (polonaise)

Notation préfixée (polonaise) d'une formule

- Les formules peuvent êtres représentées par la notation **polonaise** qui consiste à mettre les connecteurs en tête de la formule,

- La notation polonaise se déduit en parcourant l'arbre de décomposition comme suit :

Racine, Branche gauche, Branche droite

Exemple 1 :

La notation polonaise de la formule:

$$\neg ((P \lor Q) \rightarrow P) \land (Q \rightarrow R)$$

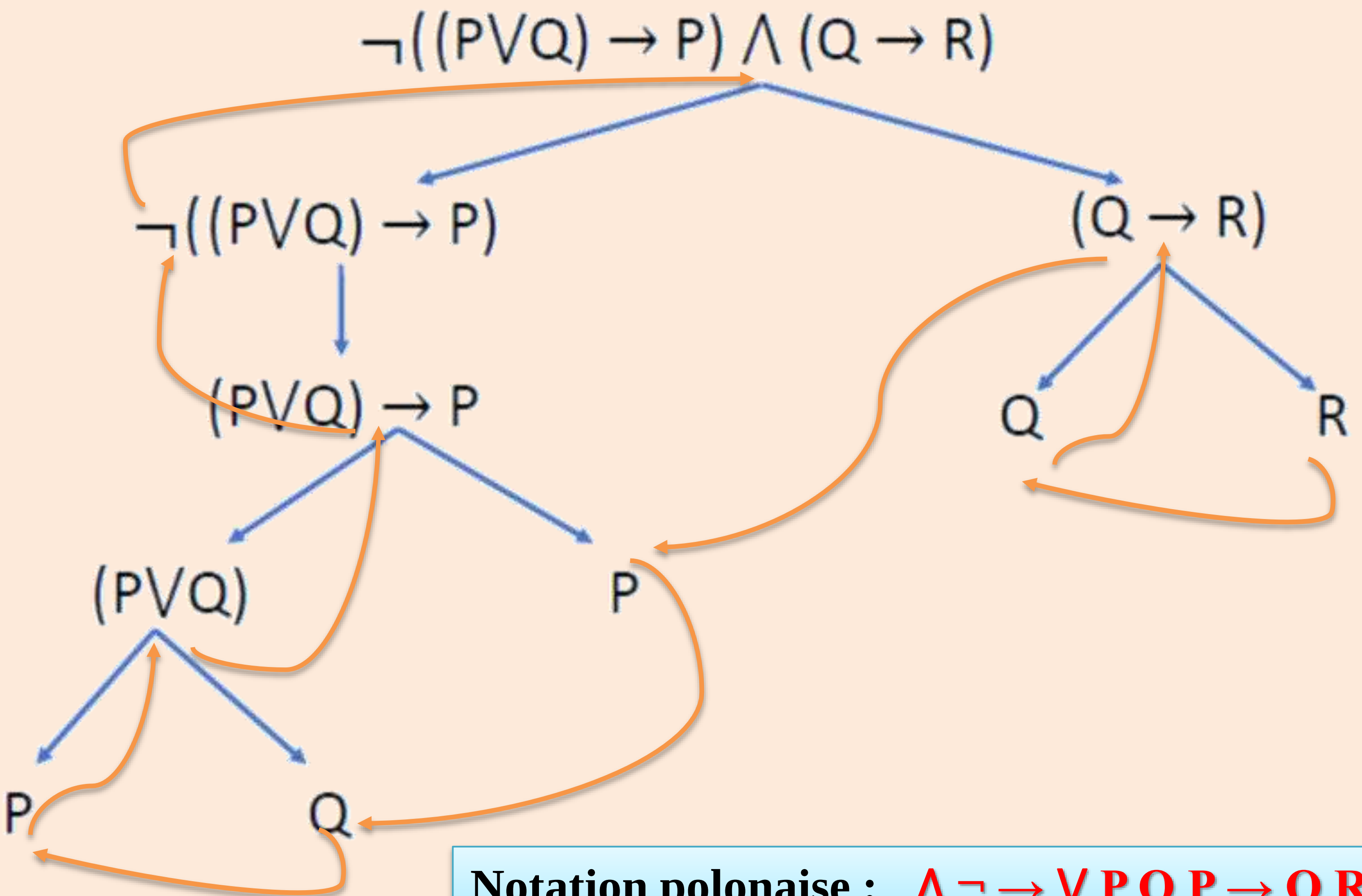
est

Notation polonaise : $\land \neg \rightarrow \lor P\, Q\, P \rightarrow Q\, R$

Notation préfixée (polonaise)

$\neg((P \vee Q) \rightarrow P) \wedge (Q \rightarrow R)$

Exemple 1 :



Notation polonaise : $\wedge \neg \rightarrow \vee P\, Q\, P \rightarrow Q\, R$

Notation préfixée (polonaise)

Calcul de vérité

La valeur de vérité d une formule peut être calculée comme suit :

- Parcourir la formule (notation polonaise) de droite à gauche,
- Si on rencontre un connecteur unaire (¬) on l'applique à la variable située à sa droite (on remplace ce connecteur et cette variable par la valeur de vérité résultante)
- Si on rencontre un connecteur binaire, on l'applique aux deux propositions à sa droite (on remplace ce connecteur et les deux propositions par le résultat)

Notation préfixée (polonaise)

Exemple 1 :

Calcul de vérité

soit la formule : $\neg((P \vee Q) \rightarrow P) \wedge (Q \rightarrow R)$

Soit **P** = Vrai, **Q** = Faux, **R** = Vrai

La notation polonaise de la formule : $\wedge \neg \rightarrow \vee PQP \rightarrow QR$

① $\wedge \neg \rightarrow \vee PQP \underbrace{\rightarrow QR}_{\text{Vrai}}$

② $\wedge \neg \rightarrow \underbrace{\vee PQ}_{\text{Vrai}} P \text{ Vrai}$

③ $\wedge \neg \underbrace{\rightarrow \text{ Vrai } P}_{\text{Vrai}} \text{ Vrai}$

④ $\wedge \underbrace{\neg \text{ Vrai}}_{\text{Faux}} \text{ Vrai}$

⑤ $\underbrace{\wedge \text{ Faux Vrai}}_{\text{Faux}}$

⑥ $\boxed{\text{Faux}}$

Longueur d'une formule

La longueur d'une formule est le **nombre de symboles** de l'alphabet qu'elle contient

Formule	Longueur
P	1
$\neg P$	2
$\neg (P)$	4
$\neg((P)\wedge(Q))$	10
$(\neg(P)\wedge(Q)) \rightarrow R$	12
$((P)\wedge(Q)) \rightarrow ((R)\wedge(S))$	19

Profondeur d'une formule

La profondeur d'une formule correspond à son arbre de décomposition C'est le **nombre de branche** qui sépare **la racine** (Niveau 0) de la branche la **plus éloignée**

Formule	Profondeur
P	0
¬ P	1
¬ (P)	1
¬((P)Λ(Q))	2
(¬(P)Λ(Q)) → R	3
((P)Λ(Q)) → ((R)Λ(S))	2

Complexité (ordre) d'une formule

La complexité d'une formule est le **nombre de connecteurs** qu'elle contient.

Formule	Complexité
P	0
$\neg P$	1
$\neg (P)$	1
$\neg((P)\land(Q))$	2
$(\neg(P)\land(Q)) \rightarrow R$	3
$((P)\land(Q)) \rightarrow ((R)\land(S))$	3

Substitution propositionnelle

Substitution simple

Une **substitution** associe à une variable propositionnelle **P** une formule α Elle est notée **[α/P].**

L'application de **[α/P]** à une formule f (notée f **[α/P]**) est le résultat de remplacement simultané de toutes les occurrences de **P** dans f par α**.**

Substitution propositionnelle

Exemples :

Substitution simple

Formule [Substitution]	Formule après substitution
$(P \lor Q)$ [R/P]	$R \lor Q$
$(P \to Q)$ [P/Q]	$P \to P$
$(P \to Q)$ [S/R]	$P \to Q$
$((P \lor Q) \land \neg P)$ [¬P/P]	$(\neg P \lor Q) \land \neg\neg P$
$((P \lor Q) \land \neg P)$ [(R∧S)/P]	$((R \land S) \lor Q) \land \neg(R \land S)$
$(P \to S)$ [(Q → R)/P]	$(Q \to R) \to S$

Substitution propositionnelle

Substitution simultanée

- Une **substitution simultanée** consiste à substituer simultanément ***n*** variables propositionnelles dans une formule f.
- On note $f\ [\alpha_1/P_1\ ,\ \alpha_2/P_2\ ,..,\ \alpha_n/P_n\ ]$ la substitution dans f des variables propositionnelles P_i par les formules α_i
- Les P_i sont distincts

Substitution propositionnelle

Exemples :

Substitution simultanée

Formule [Substitution]	Formule après substitution
$(P \vee Q)\ [R/P, S/Q]$	$R \vee S$
$(P \rightarrow Q)\ [P/Q, R/P]$	$R \rightarrow P$
$(P \rightarrow Q)\ [S/R, P/P]$	$P \rightarrow Q$
$((P \vee Q) \wedge \neg P)\ [\neg P/P, (P \wedge Q)/Q]$	$(\neg P \vee (P \wedge Q)) \wedge \neg\neg P$

Substitution composée

- **Plusieurs** substitutions peuvent être appliquées à une formule,
- On note **(f [α_1/P$_1$, α_2/P$_2$,.., α_n/P$_n$]) [β_1/Q$_1$, β_2/Q$_2$, .., β_n/Q$_n$]**
- Substituer dans f les variables **P$_i$** par les formules α_i, dans la formule obtenue, substituer les variables **Q$_i$** par les formules β_i

Substitution propositionnelle

Exemples :

Substitution composée

Formule [Substitution]	Formule après substitution
$((P \vee Q)\ [(Q \rightarrow R)/P])\ [\neg Q/Q]$	$(\neg Q \rightarrow R) \vee \neg Q$
$((P \rightarrow Q)\ [P/Q])\ [(R \wedge S)/P]$	$(R \wedge S) \rightarrow (R \wedge S)$
$((P \rightarrow Q)\ [S/R])\ [P/P]$	$P \rightarrow Q$
$(((P \vee Q) \wedge \neg P)\ [\neg P/P])\ [(P \wedge Q)/Q]$	$(\neg P \vee (P \wedge Q)) \wedge \neg\neg P$

Thank you